

Homework 2

Ruan Xingcheng 2015K8009929047

2017/9/11

1 Answer Sheet

Theorem 1 *If a heuristic is consistent, it must be admissible.* \Leftrightarrow 对任意结点 n , 和它的任意祖先 n' , 满足 $h(n') \leq h(n) + c(n', a, n) \Rightarrow h(n) \leq h^*(n)$, 其中 $h^*(n)$ 是从结点 n 到目标的最优路径长度。

Proof 1 在 *heuristic* 是 *consistent* 的时候, 如果存在一个结点 n_0 , $h(n_0) > h^*(n_0)$, 那么:

$$\begin{aligned} g(n_0) + h(n_0) &> g(n_0) + h^*(n_0) && (h^*(n_0) \text{ is optimal}) \\ &= g(GOAL) && (\text{obvious}) \\ &= g(GOAL) + h(GOAL) && (h(GOAL) = 0) \\ \Rightarrow h(n_0) &> g(GOAL) - g(n_0) + h(GOAL) = c(n_0, a, GOAL) + h(GOAL) \\ \Rightarrow n_0 &\text{ is not admissible, contrary.} \end{aligned}$$

综上所述, 不存在任意结点 n_0 , $h(n_0) > h^*(n_0)$, 那么对于任意结点 n , 有 $h(n) \leq h^*(n)$ 。

problem2

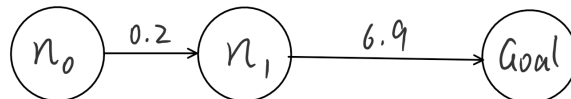
Give an example of heuristic, which is admissible but not consistent.

example

heuristic 如下给定:

$$h(n) = \lfloor h^*(n) \rfloor$$

显然这个 heuristic 满足 admissible, 然后看下面的例子:



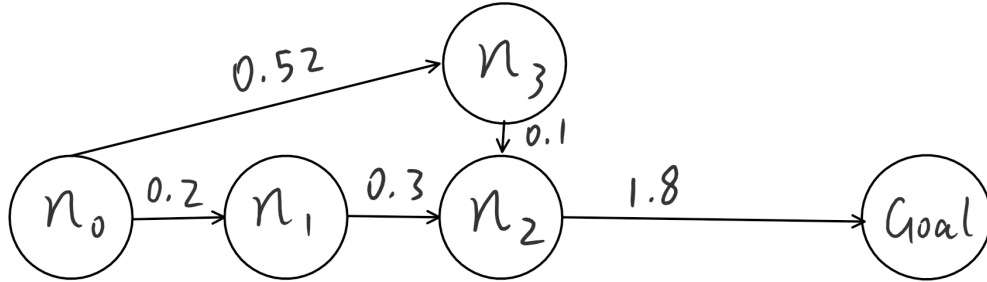
3 个结点 n_0, n_1, Goal 在同一条直线上, 我们很容易能得到下面的关系:

$$h(n_0) = \lfloor h^*(n_0) \rfloor = 7 > c(n_0, a, n_1) + h(n_1) = c(n_0, a, n_1) + \lfloor h^*(n_1) \rfloor = 6.2$$

这样, 这个例子便不满足 consistent。

Theorem 2 A^* of graph search is **not** optimal with admissible heuristic.

Proof 2 满足 *admissible* 的 *heuristic* 直接沿用上一题中的定义，然后我们来看下面的例子：



四个结点 $n_0, n_1, n_2, Goal$ 在同一条直线上, n_3 在 n_2 上方, 各点间的消耗如图所示。起始结点为 n_0 , 它离目标结点 $Goal$ 的直线距离为 2.3 , 其它结点不再赘述。值得注意的是, $h(n_0) = h(n_1) = 2$, $h(n_2) = h(n_3) = 1$ 。现在进行图搜索, 第一次 *frontier* 扩展到 n_1, n_3 , 由于

$$f(n_3) < 0.6 + 1 < f(n_1) = 0.2 + 2 = 2.2$$

故从 n_3 开始扩展到 n_2 , 由于

$$f(n_2) = g(n_2) + h(n_2) = 0.7 + 1 < 0.2 + 2 = g(n_1) + h(n_1) = f(n_1)$$

故路径会从 n_2 先扩展到 $Goal$, 而轮到 n_1 时, 由于 n_2 已经被扩展到了, 所以不能再扩展, 此时只能返回路径 $n_0 \rightarrow n_3 \rightarrow n_2 \rightarrow Goal$, 最优路径应是 $n_0 \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow Goal$, 故满足 *admissible* 的 *heuristic* 的图搜索不是最优的。